11. Kvadratická rovnice s reálnými koeficienty

př. $x^2-2x+2=0$ $\quad O=\mathbb{C}$, $D=\mathbb{C}$

$(a=1, b=-2, c=2)$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-4.1.2}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}$$ ... v R nemá řešení $(D<0)$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4i^2}}{2}=\frac{2\pm2i}{2}=\frac{2(1\pm i)}{2}=1\pm i \begin{cases} 1+i \\ 1-i \end{cases}$$ ... v C má 2 komplexně sdružené imaginární kořeny

př. $x^2+9=0$

$x^2=-9$ ... nemá v R řeš.

$x^2=9i^2$

$|x|=3i$

$x_{1,2}=\pm3i$ v C

KVADRATICKÁ ROVNICE $ax^2+bx+c=0$ s reálnými koeficienty ($a,b,c\in R, a\neq0$) a diskriminantem $D=b^2-4ac$ má

- pro $D>0$ v C i R 2 různé reál. kořeny $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$
- pro $D=0$ v C i R 1 dvojnásobný reálný kořen $x_{1,2}=\frac{-b}{2a}$
- pro $D<0$ v R nemá řešení
  v C 2 komplexně sdružené imaginární kořeny
  $$x_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{|D|}}{2a} \quad \left(x_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{-D}}{2a}\right)$$

- v oboru komplexních čísel má tedy každá kv. rce s reál. koef. řešení

POZNÁMKA

- i pro imaginární kořeny x_1, x_2 kv. rce v normovaném tvaru $(a=1)$ s reál. koef. $(x^2+px+q=0)$ platí Viètovy vzorce

$$x^2+px+q=0 \Rightarrow \begin{aligned} x_1+x_2&=-p \\ x_1x_2&=q \end{aligned}$$

př. $x^2-2x+2=0$ $\quad p=-2,\ q=2$

(řeš. viz výše) $\left.\begin{aligned} x_1&=1+i \\ x_2&=1-i \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1+x_2&=1+i+1-i=2=-p \\ x_1x_2&=(1+i)(1-i)=1^2-i^2=1-(-1)=2=q \end{aligned}$

Příklady

① Řešte v C

a) $7x^2+5=0$ RYZE KV. RCE $(b=0)$

$7x^2=-5$

$x^2=-\frac{5}{7}$

$|x|=\sqrt{-\frac{5}{7}}=\sqrt{\frac{5}{7}i^2}$

$|x|=i\sqrt{\frac{5}{7}}$

$x_{1,2}=\pm i\sqrt{\frac{5}{7}}=\pm i\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$

$x_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{35}}{7}i$

2.zp. $7x^2+5=0$

$(a=7, c=5, b=0)$

$x_{1,2}=\frac{0\pm\sqrt{0-4.7.5}}{14}=$

$x_{1,2}=\frac{\pm\sqrt{-140}}{14}$

$x_{1,2}=\pm i\frac{\sqrt{140}}{14}$

$x_{1,2}=\pm i\frac{\sqrt{4.35}}{14}$

$x_{1,2}=\pm i\frac{2\sqrt{35}}{14}$

$x_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{35}}{7}i$

3.zp. $7x^2+5=0$

$7x^2-(-5)=0$

a^2-b^2

$7x^2-5i^2=0$

$(\sqrt{7}x-\sqrt{5}i)(\sqrt{7}x+\sqrt{5}i)=0$

$\sqrt{7}x-\sqrt{5}i=0$ $\qquad$ $\sqrt{7}x-\sqrt{5}i=0$

$\sqrt{7}x=\sqrt{5}i$ $\qquad$ $\sqrt{7}x=\sqrt{5}i$

$x=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}i$ $\qquad$ $x=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}i$

$x_1=\frac{\sqrt{35}}{7}i$ $\qquad$ $x_2=\frac{\sqrt{35}}{7}i$

b) $3x^2-4x+2=0$ $\qquad \mathcal{O}=\mathbb{C} \quad \mathcal{D}=\mathbb{C}$

$(a=3,\ b=-4,\ c=2)$

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-4.3.2}}{6}=\frac{4\pm\sqrt{-8}}{6}=\frac{4\pm i\sqrt{8}}{6}=\frac{4\pm i\,2\sqrt{2}}{6}=\frac{2(2\pm\sqrt{2}\,i)}{6}=\frac{2\pm i\sqrt{2}}{3}$$

② Řešte v C

3.1 a) $x^2-3x+3=0$ $\qquad \mathcal{O}=\mathbb{C},\ \mathcal{D}=\mathbb{C}$

$(a=1,\ b=-3,\ c=3)$

$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-4.3}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{3\pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathcal{K}=\left\{\frac{3+i\sqrt{3}}{2},\ \frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right\}$$

b) $2x^2+x+1=0$ $\qquad \mathcal{O}=\mathbb{C},\ \mathcal{D}=\mathbb{C}$

$(a=2,\ b=1,\ c=1)$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4.2.1}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{-7}}{4}=\frac{-1\pm i\sqrt{7}}{4}$$

$$\mathcal{K}=\left\{\frac{-1+i\sqrt{7}}{4},\ \frac{-1-i\sqrt{7}}{4}\right\}$$

c) $4x^2+3=0$

$$4x^2=-3$$

$$x^2=-\frac{3}{4}=\frac{-3}{4}$$

$$|x|=\frac{\sqrt{-3}}{2}=\frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$$x_{1,2}=\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\mathcal{K}=\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

d) $3x^2-7x+5=0$

$(a=3,\ b=-7,\ c=5)$

$$x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49-4.3.5}}{6}=\frac{7\pm\sqrt{49-60}}{6}$$

$$x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{-11}}{6}=\frac{7\pm i\sqrt{11}}{6}$$

$$\mathcal{K}=\left\{\frac{7+i\sqrt{11}}{6},\ \frac{7-i\sqrt{11}}{6}\right\}$$

③ Řešte v C

3.2 a) $(x^2+x+1)(x^2+x-1)=0$ $\qquad \mathcal{O}=\mathbb{C},\ \mathcal{D}=\mathbb{C}$

součinový tvar $a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \vee b=0$

$x^2+x+1=0$

$(a=1,\ b=1,\ c=1)$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4.1.1}}{2}$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

imaginární kořeny

$x^2+x-1=0$

$(a=1,\ b=1,\ c=-1)$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4.1.1}}{2}$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

reálné kořeny

$$\mathcal{K}=\left\{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\ \frac{-1-i\sqrt{3}}{2},\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$$

b) $\dfrac{x+2}{x-3}+\dfrac{x-1}{x+1}=0$ $\qquad \mathcal{O}=\mathbb{C} \quad \mathcal{D}=\mathbb{C}-\{3,-1\}$!

rce s nezn. ve jmenov.

$$(x+2)(x+1)+(x-1)(x-3)=0$$

$$x^2+2x+x+2+x^2-3x-x+3=0$$

$$2x^2-x+5=0$$

$(a=2,\ b=-1,\ c=+5)$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4.2.5}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{-39}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{39i^2}}{4}$$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm i\sqrt{39}}{4}\in\mathcal{D}$$

$$\mathcal{K}=\left\{\frac{1+i\sqrt{39}}{4},\ \frac{1-i\sqrt{39}}{4}\right\}$$

- ROZKLAD KVADRATICKÉHO TROJČLENU v C

Každý kvadratický trojčlen ax^2+bx+c s reálnými koeficienty lze vyjádřit jako součin $a(x-x_1)(x-x_2)$, kde x_1, x_2 jsou kořeny kvadr. rce $ax^2+bx+c=0$.

příklady

④ Rozložte v součiny lineárních dvojčlenů

3R/75 a) $4x^2-12x+25$ $\qquad$ [krátí 2 ve jmenov. rozdělím $4=2\cdot 2$]

$$4x^2-12x+25=\overset{a(x-x_1)(x-x_2)}{4\left(x-\frac{3+4i}{2}\right)\left(x-\frac{3-4i}{2}\right)}=2\left(x-\frac{3+4i}{2}\right)2\left(x-\frac{3-4i}{2}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{l}4x^2-12x+25=0\\(a=4,\ b=-12,\ c=25)\end{array}\quad x_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{144-4.4.25}}{8}=\frac{12\pm\sqrt{-256}}{8}=\frac{12\pm16i}{8}=\frac{3\pm4i}{2}\right]$$

$$=(2x-(3+4i))(2x-(3-4i))=(2x-3-4i)(2x-3+4i)$$

⑤ Rozložte v součiny lineárních dvojčlenů

3.4 DÚ

a) $x^2+x+1 = \left(x - \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x - \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right) = \underset{\sim\sim\sim}{\left(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}$

$a=1, b=1, c=1$

$\left[x_{1/2} = \frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2} \left(= -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right]$ nebo $\left(x-\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(x-\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \dots$

b) $x^2-x+1 = \left(x - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) = \underset{\sim\sim\sim}{\left(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}$

$\left[x_{1/2} = \frac{1\pm\sqrt{1-4.1.1}}{2} = \frac{1\pm i\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right]$ nebo $= \left[x-\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right]\left[x-\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right] = \dots$

c) $3x^2+2x+2 = 3\left(x-\left(-\frac{1}{3}+i\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right)\left(x-\left(-\frac{1}{3}-i\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right) = \underset{\sim\sim\sim}{3\left(x+\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{5}}{3}i\right)\left(x+\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}i\right)}$

$\left[x_{1/2} = \frac{-2\pm\sqrt{4-4.3.2}}{6} = \frac{-2\pm\sqrt{-20}}{6} = \frac{-2\pm i\sqrt{\overset{4.5}{20}}}{6} = \frac{-2\pm 2i\sqrt{5}}{6} = \frac{2(-1\pm i\sqrt{5})}{6} = \frac{-1\pm i\sqrt{5}}{3} = -\frac{1}{3}\pm i\frac{\sqrt{5}}{3}\right]$

d) x^2-3x+5

$\left[x_{1/2} = \frac{3\pm\sqrt{9-4.5}}{2} = \frac{3\pm\sqrt{-11}}{2} = \frac{3\pm i\sqrt{11}}{2} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{11}}{2}i\right]$

$x^2-3x-5 = \left[x-\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2}i\right)\right]\left[x-\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}i\right)\right] = \underset{\sim\sim\sim}{\left(x-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}i\right)\left(x-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2}i\right)}$

⑥ Řešte v C

$px^2+(2p-1)x+p=0$ rce s parametrem $x \in C$, $p \in R$ parametr

$(a=p, b=2p-1, c=p)$

$p=0$

LIN. RCE

dos. za $p=0$

$0x^2+(2\cdot 0-1)x+0=0$

$0-x=0$

$x=0$

$K_0=\{0\}$

$p\neq 0$

$D = (b^2-4ac) = \underset{(a-b)^2}{(2p-1)^2} - 4p\cdot p = \underset{a^2-2ab+b^2}{4p^2-4p+1} - 4p^2 = -4p+1 = 1-4p$

$D>0$

$-4p+1>0$

$1>4p$

$4p<1$

$(p\neq 0 \wedge)\ p<\frac{1}{4}$

$x_{1/2} = \frac{-(2p-1)\pm\sqrt{1-4p}}{2p}$

$x_{1/2} = \frac{1-2p\pm\sqrt{1-4p}}{2p}$

$D=0$

$-4p+1=0$

$p=+\frac{1}{4}$

$\left(x_{1/2} = \frac{-b}{2a}\right)$

$x_{1/2} = \frac{-(2p-1)}{2p}$

$x_{1/2} = \frac{1-2p}{2p}$

$x_{1/2} = \frac{1}{2p}-1$

dos. za $p=+\frac{1}{4}$

$x_{1/2} = \frac{1}{2\cdot(+\frac{1}{4})}-1$

$x_{1/2} = \frac{1}{+\frac{1}{2}}-1$

$x_{1/2} = +2-1$

$x_{1/2} = 1$

$D<0$

$-4p+1<0$

$-4p<-1$ 1.(-1) změna zn. nerovnosti

$p>+\frac{1}{4}$

$\left(x_{1/2} = \frac{-b\pm i\sqrt{-D}}{2a}\right)$

$x_{1/2} = \frac{-(2p-1)\pm i\sqrt{-(1-4p)}}{2p}$

$x_{1/2} = \frac{1-2p\pm i\sqrt{4p-1}}{2p}$

TABULKA

p	K
$p=0$	$\{0\}$
$p<\frac{1}{4}, p\neq 0$	$\left\{\frac{1-2p\pm\sqrt{1-4p}}{2p}\right\}$ reálné kořeny
$p=\frac{1}{4}$	$\{1\}$
$p>\frac{1}{4}$	$\left\{\frac{1-2p\pm i\sqrt{4p-1}}{2p}\right\}$ imag. kořeny